# Вопросы для подготовки к экзамену

### 1. Множества, отношения, алгебры

1. Множества, подмножества. Способы определения множеств. Равенство множеств. Операции над множествами (объединение, пересечение, разность, симметрическая разность, дополнение). Методы доказательства теоретико-множественных тождеств.
2. Неупорядоченная пара, упорядоченная пара, кортеж. Декартово произведение множеств.
3. Отображения: область определения, область значений. Инъективное, сюръективное и биективное отображения. Частичное отображение.
4. Соответствия. График и граф соответствия, область определения, область значения. Сечение соответствия. Сечение соответствия по множеству. Функциональность соответствия по компоненте. Бинарные и n-арные отношения. Связь между отношениями, соответствиями и отображениями.
5. Композиция соответствий, обратное соответствие и их свойства (с доказательством).
6. Специальные свойства бинарных отношений на множестве (рефлексивность, иррефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность).
7. Классификация бинарных отношений на множестве: эквивалентность, толерантность, порядок, предпорядок, строгий порядок.
8. Отношение эквивалентности. Класс эквивалентности. Фактор-множество.
9. Отношения предпорядка и порядка. Наибольший, максимальные, наименьший и минимальные элементы. Точная нижняя и верхняя грани множества.
10. Точная верхняя грань последовательности. Индуктивное упорядоченное множество. Теорема о неподвижной точке (с доказательством). Пример вычисления неподвижной точки.
11. Операции на множестве. Понятие алгебраической структуры. Свойства операций (ассоциативность, коммутативность, идемпотентность). Нуль и нейтральный элемент (единица) относительно операции. Примеры. Универсальная алгебра, носитель, сигнатура. Примеры. Однотипные алгебры.
12. Группоиды, полугруппы, моноиды. Единственность нейтрального элемента. Обратный элемент. Группа. Единственность обратного элемента в группе.
13. Циклическая полугруппа (группа). Образующий элемент. Примеры конечных и бесконечных циклических полугрупп и групп. Порядок конечной группы. Порядок элемента. Теорема о равенстве порядка образующего элемента конечной циклической группы порядку группы.
14. Кольца. Аддитивная группа и мультипликативный моноид кольца. Коммутативное кольцо. Кольца вычетов. Теорема о тождествах кольца (аннулирующем свойстве нуля, свойстве обратного по сложению при умножении, дистрибутивности вычитания относительно умножения).
15. Тела и поля. Примеры полей. Область целостности. Теорема о конечной области целостности (с доказательством). Поля вычетов. Решение систем линейных уравнений в поле вычетов.
16. Подполугруппа, подмоноид, подгруппа. Примеры. Циклические подгруппы.
17. Смежные классы подгруппы по элементу. Теорема Лагранжа.
18. Полукольцо. Идемпотентное полукольцо. Естественный порядок идемпотентного полукольца.
19. Замкнутое полукольцо. Итерация элемента. Примеры вычисления итерации в различных замкнутых полукольцах.
20. Непрерывность операции сложения в замкнутом полукольце. Теорема о наименьшем решении линейного уравнения в замкнутом полукольце.
21. Квадратные матрицы порядка *n* над идемпотентным полукольцом. Теорема о полукольце квадратных матриц. Замкнутость полукольца квадратных матриц над замкнутым полукольцо. Решение систем линейных уравнений в замкнутых полукольцах.

### 2. Элементы теории графов

1. Основные понятия теории графов: неориентированные и ориентированные графы, цепи, пути, циклы, контуры. Подграфы.
2. Связность неориентированного графа. Компоненты связности.
3. Связность, сильная и слабая связность орграфа. Компоненты связности (сильной, слабой).
4. Поиск в глубину в неориентированном графе. Древесные и обратные ребра. Поиск фундаментальных циклов на основе поиска в глубину.
5. Поиск в глубину в орграфе. Классификация дуг. Критерий бесконтурности.
6. Поиск в ширину в орграфе и поиск (на основе поиска в ширину) кратчайших расстояний от фиксированной вершины: алгоритм волнового фронта и поиск в ширину в орграфе с числовыми метками дуг.
7. Изоморфизм графов. Группа автоморфизмов графа и ее вычисление.
8. Задача о путях в ориентированном графе, размеченном над полукольцом и ее решение с помощью алгоритма Флойда — Уоршелла — Клини. Задача о достижимости и поиске кратчайших расстояний между двумя узлами графа.

### 3. Регулярные языки и конечные автоматы

1. Алфавит, слово, язык. Операции над языками, полукольцо всех языков в заданном алфавите и его замкнутость.
2. Регулярные языки и регулярные выражения. Полукольцо регулярных языков как полукольцо с итерацией (не являющееся замкнутым).
3. Понятие конечного автомата (КА) и языка, допускаемого КА. Анализ и синтез КА.
4. Теорема Клини о совпадении класса языков, допускаемых КА и класса регулярных языков: теорема о регулярности языка любого КА и теорема о построении КА по произвольному регулярному выражению.
5. Детерминизация КА. Регулярность дополнения регулярного языка и пересечения двух регулярных языков. Проблемы пустоты и эквивалентности.
6. Лемма о разрастании для регулярных языков.

### 

### 4. Элементы комбинаторики

1. Формулы включения и исключения (без вывода). Формула для числа сюръекций (с выводом)
2. Однородные линейные рекуррентные соотношения (ОЛРС) с постоянными коэффициентами. Понятие решения, фундаментальной системы решений (ФСР). Теорема о связи между решениями и начальными условиями.
3. Теорема об общем решении ОЛРС как линейной комбинации фундаментальных решений.
4. Характеристический полином и характеристическое уравнение ОЛРС. Структура общего решения в случае вещественных и комплексных корней характеристического полинома.
5. Неоднородные линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Теорема о структуре общего решения. Поиск частного решения методом подбора. Принцип суперпозиции (без доказательства).
6. Понятие действия группы на множестве. Стабилизаторы и орбиты. Лемма Бернсайда (с доказательством).
7. Функции разметки. Понятие эквивалентных функций разметки. Структурный перечень функций разметки.
8. Ступенчатые функции разметки. Структурный перечень функций, сохраняемых произвольной подстановкой, разложенной на независимые циклы
9. Циклический (цикловой) индекс группы. Теорема Пойа (с выводом числа классов эквивалентности, без доказательства утверждения о структурном перечне классов эквивалентности).

# Типы экзаменационных задач

#### Модуль 1

1. Доказать тождество .
2. Доказать тождество .
3. Доказать тождество .
4. Доказать, что для любой функции *f* и любых множеств *A* и *B* имеют место соотношения: а) ; б) .
5. Построить график и граф бинарного отношения , заданного на множестве , если .
6. Для бинарного отношения  на множестве  построить графики отношений  и .
7. Для бинарного отношения  на множестве найти , , , , , .
8. Пусть бинарное отношение  определено на множестве положительных рациональных чисел следующим образом: , если . Показать, что  является отношением порядка.
9. Установить, обладает ли определенное ниже бинарное отношение ρ на множестве целых чисел свойствами рефлексивности (или иррефлексивности), симметричности (или антисимметричности) и транзитивности:

ρ = {(x,y): |x-y|≥k>0}. Описать квадрат этого отношения.

1. Ассоциативна ли операция  на множестве *M*, если , .
2. Решить уравнение  в группе , если , , .
3. Решить уравнение  в группе , где .
4. Найти в  решение системы уравнений



Доказать, что если в кольце оба произведения и обратимы, то оба элемента  и  обратимы. Что изменится в результате, если сохранить обратимость только одного произведения?

1. Решить в полукольце S = ([0,1], max, min) систему уравнений:

1. Решить в полукольце S = (, НОД, НОК) систему уравнений:

**Модуль 2**

1. Орграф задан матрицей меток дуг:

.

Используя поиск в ширину, найти кратчайшие расстояния от источника (вершины v1), Показать изменение содержимого очереди вершин.

1. Для орграфа, используя решение систем линейных уравнений в полукольце **R**+, вычислить матрицу кратчайших расстояний, если орграф задан следующей матрицей меток дуг:

.

1. Для орграфа, используя решение систем линейных уравнений в полукольце **B**, вычислить матрицу достижимости, если орграф задан следующей матрицей смежности вершин:

.

1. Найти группу автоморфизмов неориентированного графа, заданного матрицей смежности вершин.

.

1. Найти порядок группы автоморфизмов изображенного ниже графа



1. Для неориентированного графа, изображенного на рисунке, найти поиском в глубину фундаментальные циклы:

## 

1. Построить конечный автомат по регулярному выражению . Детерминизировать его.
2. Написать регулярное выражение для множества цепочек в алфавите , содержащих четное число нулей и четное число единиц.
3. Найти язык, допускаемый конечным автоматом, изображенным на рисунке.



1. Решить следующую систему линейных уравнений с регулярными коэффициентами:



1. Построить конечный автомат, допускающий те и только те цепочки в алфавите {*a*,*b*}, которые не допускает следующий конечный автомат: вход , выход , дуги с метками , , , , . Для построенного автомата записать регулярное выражение, задающее его язык.
2. Задача 7.32 из [Белоусов, Ткачев. Дискретная математика].
3. Доказать, что если язык  регулярен, то и язык  для любого  регулярен.
4. Пусть . Доказать, что язык  нерегулярен.
5. При каких *k* язык  в алфавите {*a*} будет регулярным?
6. Сколь много положительных целых чисел, меньших или равных числа 2300, взаимно простых с 700?
7. Найти число ломаных, ведущих из точки  в точку , проходящих через точку  и не проходящих ни через одну из точек , , . Вершины ломаной имеют целые неотрицательные координаты, каждое звено ломаной направлено либо вверх, либо вправо.
8. Найти общее решение соотношения .
9. Найти решение соотношения при заданных начальных условиях: , , , .
10. Найти общее решение для соотношения .
11. Записать вид общего решения линейного неоднородного рекуррентного соотношения:



1. Найти структурный перечень двухцветных раскрасок правильного пятиугольника.
2. Найти число двухцветных раскрасок 9-клеточной доски.
3. Найти структурный перечень трехцветных раскрасок прямоугольника, не являющегося квадратом.
4. Задачи для самостоятельного решения из пособия А.И. Белоусов, П.А. Власов. Элементы комбинаторики.